Презентация "Классификация кривых второго порядка"

Работа студента 1 курса магистратуры
математического факультета МПГУ
Мельникова Михаила Александровича

Определение

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек, координаты которых в какой-либо системе афинной системе координат удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

где хотя бы один из коэффициентов *a11, a22, a12* отличен от нуля

Уравнение кривой второго порядка в матричном виде

Данное Общее уравнение кривой второго порядка также можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Инварианты кривой второго порядка

Инвариант — это свойство некоторого класса (множества) математических объектов, остающееся неизменным при преобразованиях определённого типа.

Вид кривой зависит от четырёх инвариантов.

Иногда встречающееся выражение «инвариант кривой» является неточным. Если умножить уравнение на ненулевое число k, то получится уравнение, задающее ту же самую кривую.

Уравнения инвариантов

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

$$I = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Характеристическая квадратичная форма

Любая кривая 2-го порядке путем замены переменных может быть преведена к виду:

$$F_0(x,\, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Далее, по корням характеристического уравнения можно определить, будет ли кривая являться эллипсом, мнимым эллипсом, гиперболой или параболой

Характеристическое уравнение

Характеристическое уравнение определяется формулой

$$\lambda^2 - I\lambda + D = 0$$

Где I, D - инварианты, определенные выше, а λ определяется уравнением:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Классификация кривых 2-го порядка через инварианты

Эллипс - $D > 0$ и $\Delta \cdot I < 0$;

Мнимый эллипс - $D > 0$ и $\Delta \cdot I > 0$;

Гипербола - D < 0

Парабола - D = 0

Невырожденные кривые ($\Delta = 0$.)

Вещественная точка на пересечении двух мнимых прямых - D > 0

Пара вещественных пересекающихся прямых - D < 0

Вырожденная парабола - D = 0

Центр кривой второго порядка

Координаты центра определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Если кривая центральная, то перенос начала координат в её центр приводит уравнение к виду:

$$a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + \frac{\Delta}{D} = 0, \quad \bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0,$$

Диаметр кривой 2-го порядка

Диаметром кривой второго порядка называется геометрическое место середин параллельных хорд этой кривой. Полученный таким образом диаметр называется сопряжённым этим хордам или их направлению. Диаметр, сопряжённый хордам, определяется уравнением:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\cos\theta + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\sin\theta = 0.$$

Угол θ - угол между хордами и положительным направлением оси Ox

Определение кривой через точки

Для определение Общего уравнения кривой второго порядке достаточно знать пять точек, через которые она проходит, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой

Уравнение кривой в таком случае определяется следующей формулой:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Касательная к кривой 2-го порядка

Уравнение касательной к кривой второго порядка в точке (x1, y1) имеет вид:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})\,x + (a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})\,y + (a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}) = 0$$

Нормаль к кривой 2-го порядка

Уравнение нормали к кривой второго порядка в точке (x1, y1) имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}} = \frac{y - y_1}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}$$

Теоремы

1. (*Теорема Паскаля*) Точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, лежат на одной прямой.

2. (*Теорема Брианшона*) Диагонали, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, описанного около кривой второго порядка, пересекаются в одной точке.